INTERFÉRENCES ENTRE PHÉNOMÈNES DÉMOGRAPHIQUES

Daniel COURGEAU

Institut National d'Etudes Démographiques

Les données brutes que fournissent les statistiques démographiques mêlent l'effet de nombreuses causes. En particulier leur analyse doit permettre de démêler les liens qui existent entre les divers phénomènes démographiques eux-mêmes. Cette analyse a déjà été faite dans un certain nombre de cas particuliers(1) : le cas le plus général d'interférences entre deux phénomènes sera traité ici.

On se place dans le cadre d'un enregistrement annuel parfait des principaux événements démographiques d'une cohorte (mariages, naissances, migrations, décès). Ce cadre théorique idéal est utile avant d'envisager les statistiques imparfaites. On passe d'ailleurs, à l'aide de quelques hypothèses supplémentaires, de ce cas à celui de l'enregistrement rétrospectif des événements démographiques.

On suppose également que l'on travaille sur une population assez nombreuse pour pouvoir assimiler la probabilité d'un événement et sa fréquence : les deux termes seront donc par la suite utilisés indistinctement.

Formulation générale Soient deux événements démographiques notés U et V. Ces événements sont supposés renouvelables de telle sorte que le premier présente au maximum m états successifs et le second n. On possède les effectifs $\mathcal{P}_{ij}(x)$, de toutes les sous-populations d'âge exact x qui

(1) Voir en particulier [4] et [5].

ont connu dans le passé i événements U et j événements V, soit au total $(m + 1)$ $(n + 1)$ effectifs, certains bien entendu pouvant être nuls. On a également les nombres annuels d'événements de chaque type, classés par nombre antérieur d'événements de l'autre catégorie : $\mathcal{U}_{i,j}$ est le nombre de $i^{èmes}$ événements U qui surviennent entre les âges x et $(x + 1)$ pour les individus ayant connu antérieurement j événements V soit $m(n + 1)$ nombres. $\mathcal{V}_{i,j}$ est le nombre de $j^{èmes}$ événements V qui surviennent entre les âges x et $(x + 1)$ pour les individus ayant connu antérieurement i événements U soit $(m + 1)n$ nombres.

On veut à partir de ces effectifs estimer les probabilités du type suivant : probabilité u_{ij} pour un individu qui a connu antérieurement $(i - 1)$ événements U d'en connaître un $i^{ème}$ entre les âges x et $(x + 1)$ sous l'hypothèse qu'il ait connu antérieurement j événements V. Le fait d'estimer de telles probabilités est validé par l'hypothèse suivante : *le comportement d'un individu entre les âges* x *et* (x + 1) *est lié au nombre d'événements antérieurs (U et V) qu'il a connus, mais est indépendant de la répartition du cours du temps passé de ces divers événements.*

Lorsque $j = 0$ on a les probabilités d'arrivée des divers événements U lorsque le risque d'arrivée de V ne joue pas. Lorsque $j > 0$ on travaille au contraire sur une population ayant connu j fois l'événement V et l'on calcule ses probabilités de connaître U sous cette condition. Certaines de ces probabilités, en particulier pour les premiers âges, ne seront pas estimables, lorsqu'à un âge donné aucun individu n'est soumis au risque de connaître l'événement considéré.

Pour pouvoir estimer ces diverses probabilités, il est nécessaire de connaître à chaque instant t, de l'intervalle $(x, x + 1)$ les diverses populations soumises au risque. Une nouvelle hypothèse est nécessaire. On supposera que, si *seul joue le risque de connaître un* i$^{\text{ème}}$ *événement U entre* x *et* (x + 1) *sachant que l'individu a connu* j *événements V, alors, les événements considérés se répartissent de façon uniforme sur l'intervalle* (x , x + 1)(2). Sous cette condition, au cours de l'intervalle $(t, t + dt)$ la probabilité pour qu'un tel événement $U_{i,j}$ survienne, connaissant la probabilité $u_{i,j}$ qu'a un individu de connaître un $i^{ème}$ événement u entre x et $x + 1$ lorsque seul ce risque joue, est :

$$P\{U_{i,j}(t, t + dt)\} = \frac{u_{i,j}\, dt}{1 + (x - t)\, u_{i,j}}$$

Ces conditions étant réalisées on peut alors écrire les $(m + 1)$ $(n + 1)$ variations différentielles des populations $\mathcal{P}_{i,j}(t)$ du type suivant, étant entendu

(2) Il aurait été tout aussi satisfaisant de supposer que ces événements se produisent avec une probabilité constante au cours de l'intervalle [1].

que certains termes peuvent être nuls (par exemple $u_{0,j} = 0$) (3) :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_{i,j}(t) = \frac{u_{i,j}\mathcal{P}_{i-1,j}(t)}{1 + u_{i,j}(x-t)} + \frac{v_{i,j}\mathcal{P}_{i,j-1}(t)}{1 + v_{i,j}(x-t)} - \frac{u_{i+1,j}\mathcal{P}_{i,j}(t)}{1 + u_{i+1,j}(x-t)} - \frac{v_{i,j+1}\mathcal{P}_{i,j}(t)}{1 + v_{i,j+1}(x-t)} . \tag{I}$$

qui permettent de calculer les populations $\mathcal{P}_{i,j}(t)$.

On écrit ensuite les relations qui donnent les événements $\mathcal{U}_{i,j}$ et $\mathcal{V}_{i,j}$ réellement observés, soit par exemple :

$$\mathcal{U}_{i,j} = \int_x^{x+1} \frac{u_{i,j}\,\mathcal{P}_{i-1,j}(t)\,dt}{1 + u_{i,j}(x-t)} \tag{II}$$

La résolution du système de $n(m+1) + m(n+1)$ équation en $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$ permet d'estimer ces probabilités en fonction des observations $\mathcal{U}_{i,j}$, $\mathcal{V}_{i,j}$, $\mathcal{P}_{i,j}(x)$.

Cette formulation est en général simplifiée : ou bien on ne considère que des événements non renouvelables, ou bien lorsqu'un des événements est renouvelable on ne distingue pas les divers états correspondants aux événements de divers rangs.

Evénements non renouvelables Ce modèle ne s'applique pas seulement aux événements non renouvelables (décès), mais également aux événements renouvelables lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux événements d'un rang donné (premier mariage, première migration par exemple).

On dispose dans ce cas, à l'instant x, des quatre sous-populations suivantes : $\mathcal{P}_{0,0}(x)$ individus n'ayant connu ni l'événement U, ni l'événement V ; $\mathcal{P}_{0,1}(x)$ individus n'ayant pas connu U mais ayant déjà connu V dans le passé ; $\mathcal{P}_{1,0}(x)$ individus ayant connu U, mais n'ayant pas connu V; $\mathcal{P}_{1,1}(x)$ individus ayant connu dans le passé les événements U et V. On dispose également de quatre types d'effectifs ayant vécu les événements suivants au cours de la période $(x\,,\,x+1)$:

$\mathcal{U}_{1,0}$ (resp. $\mathcal{U}_{1,1}$) individus ayant vécu l'événement U au cours de la période, sans avoir antérieurement connu V (resp. qui ont antérieurement connu V) ;

(3) L'intervalle considéré étant très court, seuls les quatre types d'événements indiqués ont une probabilité proportionnelle à dt. La probabilité d'autres événements peut s'écrire $0\,(dt)$ où $0(x)$ représente une fonction de x telle que $\frac{0(x)}{x} \to 0$ lorsque $x \to 0$.

$\mathcal{V}_{0,1}$ (resp $\mathcal{V}_{1,1}$) individus ayant vécu l'événement V au cours de la période, sans avoir antérieurement connu U (resp. qui ont antérieurement connu U).

L'estimation des populations à l'instant t se fait en résolvant le système d'équation :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_{0,0}(t) = -\frac{u_{1,0}\,\mathcal{P}_{0,0}(t)}{1+u_{1,0}(x-t)} - \frac{v_{0,1}\,\mathcal{P}_{0,0}(t)}{1+v_{0,1}(x-t)}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_{1,0}(t) = \frac{u_{1,0}\,\mathcal{P}_{0,0}(t)}{1+u_{1,0}(x-t)} - \frac{v_{1,1}\,\mathcal{P}_{1,0}(t)}{1+v_{1,1}(x-t)}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_{0,1}(t) = \frac{v_{0,1}\,\mathcal{P}_{0,0}(t)}{1+v_{0,1}(x-t)} - \frac{u_{1,1}\,\mathcal{P}_{0,1}(t)}{1+u_{1,1}(x-t)}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_{1,1}(t) = \frac{u_{1,1}\,\mathcal{P}_{0,1}(t)}{1+u_{1,1}(x-t)} + \frac{v_{1,1}\,\mathcal{P}_{1,0}(t)}{1+v_{1,1}(x-t)}$$

La première équation s'intègre sans peine :

$$\mathcal{P}_{0,0}(t) = \mathcal{P}_{0,0}(x)\,[1+u_{1,0}(x-t)]\,[1+v_{0,1}(x-t)]$$

La seconde équation s'intégre en posant $\mathcal{P}_{1,0}(t) = y(t)\,z(t)$ et en calculant successivement les deux fonctions $y(t)$ et $z(t)$. On obtient la solution suivante :

$$\mathcal{P}_{1,0}(t) = [1+v_{1,1}(x-t)]\Big[\mathcal{P}_{1,0}(x) + \\ + \frac{u_{1,0}(v_{0,1}-v_{1,1})}{v_{1,1}^2}\,\mathcal{P}_{0,0}(x)\,lg\,[1+v_{1,1}(x-t)] - \frac{u_{1,0}\,v_{0,1}\,\mathcal{P}_{0,0}(x)\,(x-t)}{v_{1,1}}\Big]$$

De même on a :

$$\mathcal{P}_{0,1}(t) = [1+u_{1,1}(x-t)]\Big[\mathcal{P}_{0,1}(x) + \\ + \frac{v_{0,1}(u_{1,0}-u_{1,1})}{u_{1,1}^2}\,\mathcal{P}_{0,0}(x)\,lg\,[1+u_{1,1}(x-t)] - \frac{v_{0,1}\,u_{1,0}\,\mathcal{P}_{0,0}(x)\,(x-t)}{V_{1,1}}\Big]$$

Pour la suite, il est inutile de calculer $\mathcal{P}_{1,1}(t)$. A partir de ces trois sous-populations on peut calculer les effectifs observés.

$$\mathcal{U}_{1,0} = \int_x^{x+1} \frac{u_{1,0}\,\mathcal{P}_{0,0}(t)\,dt}{1+u_{1,0}(x-t)} \qquad \mathcal{V}_{0,1} = \int_x^{x+1} \frac{v_{0,1}\,\mathcal{P}_{0,0}(t)\,dt}{1+v_{0,1}(x-t)}$$

$$\mathcal{U}_{1,1} = \int_x^{x+1} \frac{u_{1,1}\,\mathcal{P}_{0,1}(t)\,dt}{1+u_{1,1}(x-t)} \qquad \mathcal{V}_{1,1} = \int_x^{x+1} \frac{v_{1,1}\,\mathcal{P}_{1,0}(t)\,dt}{1+v_{1,1}(x-t)}$$

L'intégration des deux premières équations donne le système :

$$\mathcal{U}_{1,0} = u_{1,0}\, \mathcal{P}_{0,0}(x) \left[1 - \frac{v_{0,1}}{2}\right] \quad \mathcal{V}_{0,1} = v_{0,1}\, \mathcal{P}_{0,0}(x) \left[1 - \frac{u_{1,0}}{2}\right]$$

La résolution de ce système d'équations du second degré conduit à des estimations du $u_{1,0}$ et $v_{0,1}$ (4).

Le plus souvent on prend les solutions approchées suivantes, où l'on remplace les termes correcteurs $\left(1 - \frac{v_{0,1}}{2}\right)$ par $\left(1 - \frac{\mathcal{V}_{0,1}}{2\mathcal{P}_{0,0}}\right)$ et $\left(1 - \frac{u_{1,0}}{2}\right)$ par $\left(1 - \frac{\mathcal{U}_{1,0}}{2\mathcal{P}_{0,0}}\right)$:

$$\hat{u}_{1,0} = \frac{\mathcal{U}_{1,0}}{\mathcal{P}_{0,0}(x) - \frac{1}{2}\,\mathcal{V}_{0,1}} \tag{III}$$

$$\hat{v}_{0,1} = \frac{\mathcal{V}_{0,1}}{\mathcal{P}_{0,0}(x) - \frac{1}{2}\,\mathcal{U}_{1,0}} \tag{IV}$$

L'intégration des deux dernières équations conduit aux relations

$$\mathcal{U}_{1,1} = u_{1,1}\mathcal{P}_{0,1}(x) + \frac{v_{0,1}(u_{1,0} - u_{1,1})}{u_{1,1}}\,\mathcal{P}_{0,0}(x) \int_x^{x+1} lg\,\{1 + u_{1,1}(x-t)\}\,dt + \frac{1}{2}\, v_{0,1}\, u_{1,0}\,\mathcal{P}_{0,0}(x)$$

$$\mathcal{V}_{1,1} = v_{1,1}\mathcal{P}_{1,0}(x) + \frac{u_{1,0}(v_{0,1} - v_{1,1})}{v_{1,1}}\,\mathcal{P}_{0,0}(x) \int_x^{x+1} lg\,\{1 + v_{1,1}(x-t)\}\,dt + \frac{1}{2}\, v_{0,1}\, u_{1,0}\mathcal{P}_{0,0}(x).$$

La résolution de ces deux équations en tenant compte de (I) et de (II) conduit à des estimations de $u_{1,1}$ et $v_{1,1}$ (5). Le plus simple est de faire les approximations suivantes :

$$lg\,\{1 + u_{1,1}(x-t)\} \cong u_{1,1}(x-t) + 0(u_{1,1})$$

---

(4) La résolution complète de ce système est aisée, mais conduit à une formulation compliquée des probabilités à calculer.

(5) La résolution complète de ce système est moins aisée que la précédente, et ne peut se calculer que par approximations successives.

$$lg\ \{1 + v_{1,1}(x - t)\} \cong v_{1,1}(x - t) + 0(v_{1,1})$$

ce qui conduit aux deux solutions approchées :

$$\hat{u}_{1,1} = \frac{\mathcal{U}_{1,1}}{\mathcal{P}_{0,1}(x) + \frac{1}{2}\ \mathcal{V}_{0,1}} \tag{V}$$

$$\hat{v}_{1,1} = \frac{\mathcal{V}_{1,1}}{\mathcal{P}_{1,0}(x) + \frac{1}{2}\ \mathcal{U}_{1,0}} \tag{VI}$$

Il convient de noter que ces solutions approchées ne sont satisfaisantes que lorsque $\mathcal{V}_{0,1}$, $\mathcal{U}_{0,1}$ et $\mathcal{V}_{1,1}$, $\mathcal{U}_{1,1}$ sont faibles par rapport aux populations considérées.

Evénements renouvelables Ce modèle s'applique au cas où l'on considère au moins un événement renouvelable, V, tous rangs réunis. L'autre événement $\mathcal{U}$ peut être renouvelable ou non, mais cette fois-ci lorsqu'il l'est on distinguera le rang de chaque événement.

On dispose dans ce cas de $m + 1$ sous-population du type $\mathcal{P}_i(x)$ d'individus ayant connu avant l'âge x, i événements $\mathcal{U}$ (état U_i) et de $m + 1$ nombres $\mathcal{V}_i$ d'événements V survenus à des individus dans l'état U_i, au cours de la période $(x , x + 1)$.

Les populations à l'instant t subissent les variations :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_0(t) = -\frac{u_1\ \mathcal{P}_0(t)}{1 + u_1(x - t)}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_1(t) = \frac{u_1\ \mathcal{P}_0(t)}{1 + u_1(x - t)} - \frac{u_2\ \mathcal{P}_1(t)}{1 + u_2(x - t)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_m(t) = \frac{u_m\ \mathcal{P}_{m-1}(t)}{1 + u_m(x - t)}$$

La résolution de ce système va se faire par approximations successives. La première équation s'intégre sans peine et donne :

$$\mathcal{P}_0(t) = \mathcal{P}_0(x)\ [1 + u_1(x - t)]$$

La seconde équation s'intègre en posant $\mathcal{P}_1(t) = y(t)\ z(t)$ et en calculant successivement $y(t)$ et $z(t)$:

$$\mathcal{P}_1(t) = [1 + u_2(x - t)] \left[\mathcal{P}_1(x) + \frac{u_1}{u_2}\mathcal{P}_0(x)\, lg\, |1 + u_2(x - t)|\right]$$

On peut l'approcher en notant que :

$$lg\, |1 + u_2(x - t)| \cong u_2(x - t) + 0(u_2)$$

d'où

$$\mathcal{P}_1(t) = \mathcal{P}_1(x) + [u_2\mathcal{P}_1(x) - u_1\mathcal{P}_0(x)](x - t)$$

On poursuit l'intégration des équations suivantes par approximations successives. Si l'équation suivante est vérifiée au premier ordre près :

$$\mathcal{P}_i(t) = \mathcal{P}_i(x) + [u_{i+1}\mathcal{P}_i(x) - u_i\mathcal{P}_{i-1}(x)]\,(x - t)$$

on peut montrer sans peine que, dans ce cas, toujours au premier ordre près :

$$\mathcal{P}_{i+1}(t) = \mathcal{P}_{i+1}(x) + [u_{i+2}\mathcal{P}_{i+1}(x) - u_{i+1}\mathcal{P}_i(x)](x - t)$$

Cette équation étant vérifiée pour $i = 1$ elle l'est donc pour tout $i > 1$. Sous ces conditions on peut alors écrire :

$$\mathcal{P}_i(x) - \mathcal{P}_i(x + 1) = u_{i+1}\mathcal{P}_i(x) - u_i\mathcal{P}_{i-1}(x)$$

et

$$\mathcal{P}_i(t) = \mathcal{P}_i(x) + [\mathcal{P}_i(x) - \mathcal{P}_i(x + 1)]\,(x - t)$$

Or les $\mathcal{V}_i$ événements qui surviennent aux individus dans l'état U_i sont égaux à :

$$\mathcal{V}_i = \int_x^{x+1} v_i\mathcal{P}_i(t)\,dt = v_i\left[\mathcal{P}_i(x) - \frac{1}{2}\,(\mathcal{P}_i(x) - \mathcal{P}_i(x + 1))\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,v_i\,[\mathcal{P}_i(x + 1) + \mathcal{P}_i(x)]$$

On en déduit le nombre moyen d'événements, $\mathcal{V}_i$, qui surviendraient à un individu dans l'état U_i, quel que soit i :

$$\hat{v}_i = \frac{\mathcal{V}_i}{\frac{1}{2}\,(\mathcal{P}_i(x + 1) + \mathcal{P}_i(x))} \qquad \text{(VII)}$$

A nouveau on peut voir que cette formulation n'est simple qu'à condition que tous les passages d'un état U au suivant soient de faible amplitude par rapport aux populations soumises au risque.

Application aux divers phénomènes démographiques

Les équations (I) à (V) nous permettent de résoudre la plupart des cas d'interférence entre phénomènes démographiques. Ces interférences sont en fait de divers types.

a) L'un des phénomènes empêche l'autre de se produire

C'est le cas de la mortalité.

Si l'on considère l'interférence entre la mortalité et un phénomène non renouvelable (nuptialité par exemple) on voit que l'équation (I) correspond au quotient classique de nuptialité ($\mathcal{U}_{1,0}$ étant les mariages, $\mathcal{V}_{0,1}$ les décès de célibataires enregistrés au cours de l'année). L'analyse faite permet également de comparer la mortalité de deux sous-populations : $\hat{v}_{0,1}$ quotient de mortalité des célibataires (équation (II)), $\hat{v}_{1,1}$ quotient de mortalité des mariés, (équation (IV)). L'effectif $\mathcal{U}_{1,1}$ est dans ce cas nul et le quotient $u_{1,1}$ également.

Si l'on considère l'interférence entre la mortalité et un phénomène renouvelable (fécondité légitime par exemple) on voit que l'équation (V) correspond au taux de fécondité classique ($\mathcal{V}_0$ étant le nombre de naissances enregistrées et $\mathcal{P}_0(x)$ la population survivante à l'âge x). Ce cas s'applique également à l'interférence entre mortalité et migrations, sans distinction de rang.

b) L'un des phénomènes permet à l'autre de se produire

C'est le cas de la nuptialité, pour la fécondité légitime, des naissances ou des migrations de rang n pour les naissances ou les migrations de rang $n + 1$ respectivement. Lorsqu'on se trouve dans le cas d'événements non renouvelables ou renouvelables mais considérés par rangs (nuptialité permettant la première naissance légitime par exemple) on voit que l'équation (I) correspond au quotient de nuptialité(6) ($\mathcal{U}_{1,0}$ étant le nombre de mariages enregistrés au cours de l'année, $\mathcal{V}_{0,1}$ étant nul). Les équations (II) et (III) sont dans ce cas sans valeur.

L'équation (IV) correspond à la fécondité de rang 1 de la cohorte étudiée. Il faut bien voir qu'ici on fait l'hypothèse que cette fécondité est indépendante pour un âge donné, de l'âge au mariage. Si cette hypothèse pouvait être vérifiée pour les populations anciennes [3] elle ne l'est plus pour les populations actuelles. L'analyse doit donc être poussée plus loin et faire intervenir une nouvelle variable, l'âge au mariage.

---

(6) Comme on ne considère que deux événements, la mortalité est supposée nulle : il faut bien entendu la réintroduire comme troisième composante, à moins que l'on ne travaille sur des données rétrospectives.

c) Aucun des deux phénomènes ne permet ni n'empêche l'autre de se produire

Dans ce cas les équations (I) à (IV), lorsque les événements sont non renouvelables et les équations de type (V), lorsque les événements sont renouvelables s'appliquent dans leur intégralité. Il correspond par exemple à l'interférence entre mobilité géographique et nuptialité, ou à l'interférence entre mobilité géographique et fécondité(7).

Il nous est dès lors possible de résumer l'ensemble des cas envisagés dans le tableau suivant, qui donne le type d'interférence (n° du paragraphe le traitant) pour un certain nombre de phénomènes démographiques :

Phénomène étudié / Phénomène qui interfère	Mortalité	Nuptialité	Fécondité légitime	Mobilité
Mortalité		a	a	a
Nuptialité	a		b	c
Fécondité légitime	a		b	c
Mobilité	a	c	c	b

Conclusions L'analyse présentée ici doit être poursuivie dans plusieurs voies.

En premier lieu, il est nécessaire de la prolonger par l'analyse des interférences entre plus de deux phénomènes démographiques. Cette analyse a déjà été faite dans certains cas particuliers : voir, par exemple, l'analyse faite par L. Henry de la probabilité de migrer des célibataires lorsque la mortalité et la nuptialité interviennent [4].

En second lieu il est nécessaire d'affiner l'analyse en faisant intervenir non seulement l'âge de l'individu au moment considéré, mais les âges auxquels les événements antérieurs sont survenus. Cette analyse a également été faite dans certains cas particuliers : l'effet de l'âge de la femme sur sa fécondité légitime doit être complété par une étude de l'effet de l'âge au mariage sur cette fécondité [4].

Enfin cette analyse doit être étendue au cas des populations d'effectif limité, pour lesquelles non seulement l'espérance mathématique des diverses probabilités doit être estimée, mais également les variances et covariances entre

(7) On peut trouver des exemples d'application des deux cas indiqués dans [2].

elles. Là encore cette analyse a été faite dans certains cas particuliers [1]. Bien entendu un tel travail doit être poursuivi en faisant intervenir les causes externes à la démographie, mais également en recherchant d'autres méthodes qui utilisent de façon différente l'information contenue dans les statistiques démographiques.

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.L. CHIANG – *Introduction to stochastic processes in biostatistics.* J. Wiley, New York, 1968.

[2] D. COURGEAU – Mobilité géographique, nuptialité et fécondité, *Population,* n° 4-5, 1976.

[3] L. HENRY – La population de Crulai, paroisse normande. Etude historique, INED/PUF Cahier, *Travaux et Documents,* n° 38, 1958.

[4] L. HENRY – Analyse et mesure des phénomènes démographiques par cohortes, *Population,* n° 3, 1966.

[5] L. HENRY – *Démographie, analyse et modèles,* Sciences humaines et sociales, Larousse, Paris, 1972.

Interférences entre phénomènes démographiques

Daniel COURGEAU

L'interférence entre phénomènes démographiques, déjà analysée dans certains cas particuliers, est envisagée ici dans le cas plus général de deux événements renouvelables. On part des nombres annuels d'événements de chaque type et rang, classés par nombre antérieur d'événements de l'autre catégorie, ainsi que des populations initiales décomposées selon les nombres d'événements des deux types antérieurement connus.

La formulation proposée vise à estimer les probabilités de type suivant : probabilité $u_{i,j}$ *pour un individu qui a connu antérieurement* $(i - 1)$ *événements U d'en connaître un* $i^{ème}$ *entre les âges* x *et* $(x + 1)$, *sachant qu'il a connu antérieurement* j *événements V. On fait donc l'hypothèse que le comportement d'un individu est lié au nombre d'événements antérieurs qu'il a connus, mais est indépendant de la répartition, au cours du temps passé, de ces divers événements. Une autre hypothèse est encore nécessaire sur la répartition au cours du temps des événements : si seul joue le risque de connaître un* $i^{ème}$ *événement U entre* x *et* $(x + 1)$, *sachant que l'individu a connu* j *événements V, alors les événements considérés se répartissent de façon uniforme sur l'intervalle* $(x , x + 1)$. *Sous ces conditions la résolution des deux systèmes d'équations (I) et (II) permettrait l'estimation des probabilités* $u_{i,j}$. *Cette formulation est en général simplifiée : ou bien on ne considère que des événements non renouvelables ou des événements renouvelables mais d'un rang donné (premiers événements en particulier), ou bien lorsqu'un des événements est renouvelable (V), l'autre pouvant l'être ou ne pas l'être, on ne distingue pas pour V les divers états correspondant aux événements de divers rangs.*

Dans le premier cas, les formules (III) à (VI) donnent une valeur approchée des probabilités de type $u_{i,j}$ *; dans le second cas la formule (VII) donne une estimation du nombre moyen d'événements V qui surviendraient à un individu qui a connu* i *événements U.*

Ces formules sont appliquées aux divers phénomènes démographiques et permettent de distinguer trois grands types d'interférence.

a) L'un des phénomènes empêche l'autre de se produire. C'est le cas de la mortalité pour les autres phénomènes démographiques.

b) L'un des phénomènes permet à l'autre de se produire. C'est le cas de la nuptialité pour la fécondité légitime, des naissances ou des migrations de rang n *pour les naissances ou les migrations de rang* $(n + 1)$.

c) Aucun des deux phénomènes ne permet ni n'empêche l'autre de se produire. C'est le cas des migrations pour la nuptialité ou la fécondité.

Cette étude pourrait être prolongée à l'analyse de l'interférence entre plus de deux phénomènes démographiques. Il serait également nécessaire de faire intervenir les âges auxquels les événements antérieurs sont arrivés, et utile d'étendre cette étude aux populations d'effectif limité.

Interaction between demographic phenomena

Daniel COURGEAU

Interaction between demographic phenomena has already been analysed in specific cases. It considered here in the more general context of two renewable events. We set out from the annual numbers of events of each type and rank, classified by the previous number of events of the other type, and the initial populations broken down by the number of previous occurrences of both types.

Our aim is to estimate the typical probabilities in terms of a probability $u_{i,j}$ *for an individual who has previously experienced* (i – 1) *events U experiencing an* i^{th} *between ages* x *and* (x + 1) *given that he has previously experienced* j *events V. We assume that the behaviour of an individual is related to the number of previous events he has experienced, but is independent of the distribution, over time, of these various events. Another hypothesis is also required relating to the distribution of the events over the time : if the only risk is experiencing an ith event U between* x *and* (x + 1), *given that the individual has experienced* j *events V, then the events considered are distributed uniformly over the interval* (x , x + 1). *Under these conditions solving the two systems of equations (I) and (II) would enable the probabilities* $u_{i,j}$ *to be estimated. This formulation is generally simplified : either one considers only non-renewable events, or renewable events but of a given order (especially the first event), or else, if one of the events is renewable (V), whereas the other may or may not be renewable, we do not distinguish as regards V between different orders of events.*

In the first case, formulae (III) to (VI) provide an approximate value of the probabilities $u_{i,j}$ *and in the second, formula (VII) gives an estimate of the average number of events V which would occur to an individual who had already experienced* i *events U.*

These formulae can be applied to various demographic phenomena and allow three major types of interaction to be distinguished :

a) The occurrence of one phenomenon prevents the other from occuring. This is the case of mortality for other demographic phenomena.

b) The occurrence of one phenomenon is necessary for the other occur. This is the case of marriage for legitimate fertility, births or migration of rank n *for births or migrations of rank* (n + 1).

c) Neither (a) nor (b) is true. This is the case of migrations in relation to marriage or fertility.

This survey could be extended to the analysis of the interaction between more than two demographic phenomena. It would also be necessary to consider the ages at which the previous events happened, and useful to extend this study to populations of limited numbers.

Interferencias entre fenómenos demográficos

Daniel COURGEAU

La interferencia entre fenómenos demográficos que ya ha sido analizada en ciertos casos particulares, se presenta aquí en el caso mas general de dos fenómenos renovables. Se parte del número anual de acontecimientos de cada tipo y rango, clasificados según el número previo de acontecimientos de la otra categoría, y también de las poblaciones iniciales, clasificadas según las cifras de acontecimientos de los dos tipos conocidos previamente.

La formulación propuesta tiende a estimar las probabilidades del tipo siguiente : probabilidad $u_{i,j}$ *de que un individuo conozca un i ésimo acontecimiento U, entre las edades* x *y* (x + 1), *habiendo conocido* i – 1 *acontecimientos U y* j *acontecimientos V con anterioridad.*

Por lo tanto, la hipótesis plantea que el comportamiento de un individuo esta ligado al número de acontecimientos anteriores que ha vivido, pero que al mismo tiempo es independiente de la distribución en el curso del tiempo pasado, de esos acontecimientos. Pero, además, es necesaria otra hipótesis acerca de la distribución en el curso del tiempo de esos acontecimientos : si sólo actúa el riesgo de conocer un i ésimo suceso U entre x *y* (x + 1), *habiendo conocido* j *suceso V, entonces los sucesos considerados se reparten de una manera uniforme en el intervalo* (x , x + 1). *Bajo estas condiciones la resolución de los sistemas de ecuaciones (I) y (II) permite la estimacion de las probabilidades* $u_{i,j}$. *Esta formulación es en general simplificada : o bien sólo se consideran sucesos no renovables o renovables, pero de un rango dado (sucesos de primer orden en especial) ; o bien, cuando uno de los sucesos es renovable (V), el otro puede serlo o no serlo y no se distinguen para V los diversos estados correspondientes a los sucesos de diversos rangos.*

En el primer caso las fórmulas (III) a (VI) dan un valor aproximado de las probabilidades del tipo $u_{i,j}$ *; en el segundo caso la fórmula (VII) da una estimación del número medio de sucesos V que sucederían a un individuo que a conocido* i *acontecimientos U.*

Estas fórmulas se aplican a diversos fenómenos demográficos y permiten diferenciar tres grandes tipos de interferencia :

a) uno de los fenómenos impide la ocurrencia del otro. Es el caso de la mortalidad con respecto a otros fenómenos demográficos.

b) uno de los fenómenos permite que el otro se produzca. Es el caso de la nupcialidad para la fecundidad legítima ; y de los nacimientos y de las migraciones de rango n, *para los nacimientos y migraciones de rango* (n + 1).

c) ninguno de los dos fenómenos permite ni impide que se produzca el otro. Es el caso de las migraciones para la nupcialidad o la fecundidad.

Este estudio podría ser extendido al análisis de la interferencia entre más de dos fenómenos demográficos. Sería necesario también hacer intervenir la edad a la cual se producen los acontecimientos previos y extender el estudio a las poblaciones de efectivos limitados.